$$\mathcal{J}_1 = (f_i f^j) : (f')^2, \quad \mathcal{J}_2 = -(f_i f_j f^{\overline{ij}}) : (f')^3,$$
$$\mathcal{J}_3 = (b^i_j f_i f^j) : (f')^4, \quad \mathcal{J}_6 = \det \| b^j_i \| : (f')^{2n}. \qquad (20)$$

являются инвариантами, а величины

$$\mathcal{J}_4 = (-1)^n \det \| f^{\overline{ij}} \| \cdot (\det \| \overset{\kappa}{g}{}^{\kappa}_m \|) : (f')^2,$$
$$\mathcal{J}_5 = (\det \| g^i_j \|)^2 \cdot (\det \| b_{ij} \|) : (f')^{2n}, \qquad (21)$$
$$\mathcal{J}_7 = (-1)^n (\det \| \overset{\kappa}{g}{}^i_j \|)^2 (\det \| b_i^{\overline{j_1 j_2}} f^i \|) : (f')^{3n}$$

относительными инвариантами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Близникас В.И. О секущих поверхностях пространств опорных элементов – Тр. геометр. семинара, 1975 вып. 8, с 16–40.
2. Восилюс Р.В. Формальное дифференцирование в пространствах геометрических объектов. – Лит. матем. сб., 1975, т. XV, №4, с. 17–39
3. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. – Тр. Московск. матем. о-ва, т. 2, 1953, с. 275–382.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 12 1981

Т. П. Ф у н т и к о в а

КОНГРУЭНЦИИ, ОБРАЗОВАННЫЕ ЭЛЛИПСОМ И ПРЯМОЙ

В работе исследуются в трехмерном эквиаффинном пространстве конгруэнции (CL) пар фигур, порожденных эллипсом и прямой L, причем центры эллипсов C инцидентны неподвижной точке. Для одного частного класса таких конгруэнций получено безынтегральное представление.

§ I. Конгруэнции $(CL)^1$

Поставим в соответствие каждой паре фигур $\{C, L\}$ канонический репер $R = \{A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ следующим образом: вершину A репера совместим с точкой пересечения прямой L и плоскости соответствующего эллипса C, а конец вектора $\vec{e}_1$ – с центром эллипса, вектор $\vec{e}_3$ направим по прямой L, а вектор $\vec{e}_2$ – по направлению, сопряженному с направлением вектора $\vec{e}_1$ относительно эллипса C и пронормируем его таким образом, чтобы точка $\vec{N} = \vec{A} + \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ была инцидентна эллипсу.

Уравнения эллипса C в репере R имеют вид:

$$a^2 (x^1 - 1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0, \quad x^3 = 0.$$

Рассмотрим конгруэнции (CL), для которых выполняются следующие условия: 1/ $a = 1$; 2/ касательные к координатным линиям $\omega^2 = 0$ на поверхности (A_2) $(\vec{A}_\alpha = \vec{A} + \vec{e}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3)$ параллельны соответствующим плоскостям $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_3)$: 3/ все эллипсы C инцидентны инвариантной квадрике; 4/ индикатриса вектора $\vec{e}_2$ при $\omega^2 = 0$ является точкой.

Назовем такие конгруэнции (CL) конгруэнциями $(CL)^1$.

Конгруэнции $(CL)^1$ определяются системой дифференциальных уравнений

$$\omega_1^1=\omega^3=-\omega_1^3=-\omega^1,\ \omega_2^2=\omega_3^1=0,\ \omega_2^1=-\omega_3^2=\Gamma_{22}^1\omega^2,$$
$$\omega_1^2=-\omega^2,\ \omega_2^3=(1-\Gamma_{22}^1)\omega^2,\ d\Gamma_{22}^1=\mu\omega^2+\Gamma_{22}^1(2-\Gamma_{22}^1)\omega^1 \qquad (1)$$

с произволом одной функции одного аргумента и десяти постоянных.

Уравнение квадрики, которой принадлежат эллипсы , записывается в виде:

$$Q\equiv(x^1)^2-2x^1+(x^2)^2+2x^1x^2-2x^3=0. \qquad (2)$$

Анализируя систему (1), убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Т е о р е м а I. Конгруэнции $(CL)^1$ обладают следующими свойствами: I/ прямолинейные конгруэнции $(A\vec{e}_2)$, (L) являются цилиндрическими, причем торсы этих конгруэнций соответствуют и высекают на поверхности (A) координатную сеть линий; 2/ фокальная поверхность прямолинейной конгруэнции (L), описываемая точкой $\vec{F}=\vec{A}+{}^1/\Gamma_{22}^1\,\vec{e}_3$, вырождается в линию, касательные к которой параллельны соответствующим соприкасающимся плоскостям линии на поверхности (A) в точке A; 3/ поверхность (A_3) является квадрикой, касательная плоскость к которой в точке A_3 параллельна плоскости соответствующего эллипса; 4/ плоскость $(A,\vec{e}_1,\vec{e}_3)$ вдоль направления $\omega^2=0$ неподвижна; 5/ на поверхностях (A) и (A_3) координатные линии сопряжены, причем линии $\omega^2=0$ являются кривыми второго порядка, линиями тени, а касательные к линиям $\omega^1=0$ параллельны в соответствующих точках A и A_3; 6/ существует аффинное расслоение от прямолинейной конгруэнции $(A\vec{e}_1)$ к семейству плоскостей $(A,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$; 7/ вдоль направления $\omega^1=0$ прямая $1-x^1-\Gamma_{22}^1x^2=0,\ x^3=0$, проходящая через центр эллипса C и фокус F луча L, неподвижна.

Т е о р е м а 2. Линия (F) является прямой тогда и только тогда, когда точка F - середина отрезка AA_3.

Д о к а з а т е л ь с т в о: 1/ линия (F) - прямая при условии $d^2\vec{F}=k\cdot d\vec{F}$, или

$$\mu(\vec{e}_1-\vec{e}_3)+\Gamma_{22}^1(2-\Gamma_{22}^1)\vec{e}_2=0. \qquad (3)$$

Из равенства (3) получаем $\mu=0,\ \Gamma_{22}^1=2$, т.е. точка $\vec{F}=\vec{A}+{}^1/\Gamma_{22}^1\,\vec{e}_3$ середина отрезка AA_3; 2/ точка F - середина отрезка AA_3, следовательно $\Gamma_{22}^1=2$. Учитывая это условие в системе (1), получаем $\mu=0$, и тогда $d^2\vec{F}=k\cdot d\vec{F}$, т.е. линия (F) - прямая. Теорема доказана.

§ 2. Безынтегральное представление конгруэнций $(CL)^1$

Конгруэнции $(CL)^1$ можно получить с помощью следующих построений.

Используя девять постоянных, задаем квадрику Q и затем строим произвольную квадрику Q_1, подобную квадрике Q и имеющую тот же центр. На квадрике Q_1 задаем семейство линий, определяемых одной функцией одного аргумента и произвольной постоянной. Примем это семейство за семейство линий $\omega^1=0$. Выбираем на одной из этих линий произвольную точку A_3 и проводим в ней касательную плоскость к квадрике Q_1.

Через центр квадрик проводим плоскость, параллельную построенной касательной плоскости, и в сечении ее с квадрикой Q получаем эллипс C (свойство 3, теор.1).

На эллипсе C выбираем точку A, в которой касательная к эллипсу параллельна касательной к линии $\omega^1=0$ в точке A_3 (свойство 5, теор.1).

Через точки A, A_3 центр квадрик проводим векторы $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ таким же образом, как в репере R. Линиями $\omega^2=0$ на квадриках Q и Q_1 будут являться линии, инцидентные плоскости $(A,\vec{e}_1,\vec{e}_3)$, а фокусом F луча $L\equiv AA_3$ - неподвижная точка на луче AA_3, полученная при движении точки A_3 по линии $\omega^1=0$.

Список литературы

1. М а л а х о в с к и й В.С. Расслояемые пары конгруэнций фигур.- Тр. геометр. семинара ВИНИТИ, 1971, 3, с.193-220.
2. Ф и н и к о в С.П. Теория конгруэнций. ГИТТЛ, М.-Л., 1950.